

TD 5 : Nombres complexes

Forme algébrique, conjugué, module

1 ★ Mettre sous forme algébrique les complexes :

$$z = \frac{1}{i} \quad u = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad v = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

2 ★ On note $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \quad \overline{f(z)} = \frac{1}{f(\bar{z})}$$

3 ★★ Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer de deux façons l'équivalence suivante :

$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

- 1) Raisonner par double implication, en introduisant $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.
- 2) Raisonner par équivalences successives, en faisant apparaitre des conjugués.

4 ★★ Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \quad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

5 ★★ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que :

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$$

6 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| = |1-z|$

7 ★★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n ki^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les sommes (réelles) :

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^p(2p+1)$$

$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + (-1)^{p+1}(2p)$$

8 ★★★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = x \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 & \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases} \end{cases}$$

9 ★★★ Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, on a :

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité.

Forme exponentielle

10 ★★ Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants (avec $\theta \in \mathbb{R}$ fixé) :

- | | |
|---------------------|--|
| 1) $1 - \sqrt{2}$ | 4) $(1+i)^5$ |
| 2) $-5i$ | 5) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ |
| 3) $\frac{3i}{1-i}$ | |

11 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $z^3 = \bar{z}^2$ | 2) $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$ |
|----------------------|--|

12 ★★★ On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z + \bar{z} = z^3$. On raisonne par analyse-synthèse et on considère $z \in \mathbb{C}$ solution.

- 1) Trouver une solution z_0 évidente. Dans la suite, on suppose que $z \neq z_0$.
- 2) Justifier qu'il existe $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $r > 0$ tel que $z = re^{i\theta}$.
- 3) On suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$. Aboutir à une contradiction.
- 4) On suppose $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Écrire $z + \bar{z}$ sous forme exponentielle. En déduire que z ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qu'on précisera.
- 5) On suppose $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Même question.
- 6) Conclure.

13 ★★★★★ (Oral Centrale) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que

$$|1+z| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |1+z^2| \geq 1$$

Trigonométrie et complexes

14 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Mettre sous forme exponentielle les complexes :

$$1) \quad 1 + \cos \theta + i \sin \theta \quad 2) \quad 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}$$

15 ★★ Linéariser l'expression $\sin^5 x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \sin^5 x$.

16 ★★★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

17 ★★★★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$C_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad S_1 = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Racines carrées, racines n -ièmes

18 ★★ Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

$$\begin{array}{ll} 1) \quad z = -2 & 4) \quad z = 3 + 4i \\ 2) \quad z = i & 5) \quad z = 8 - 6i \\ 3) \quad z = 1 + i & 6) \quad z = \frac{-3i}{1 - i\sqrt{3}} \end{array}$$

19 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad z^3 = 8 & 4) \quad z^8 - 1 = 0 \\ 2) \quad z^5 = 32i & 5) \quad (z+1)^n = 2 \\ 3) \quad z^3 = 4\sqrt{2}(1+i) & 6) \quad z^n = (z-1)^n \end{array}$$

20 ★★ Soit $n \geq 3$, ω une racine n -ième de l'unité et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

21 ★★ On pose $\theta = 1$. Montrer que le complexe $e^{i\theta}$ est dans $\mathbb{U}$, mais qu'il n'est pas dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$.

Polynômes et résolutions d'équations

22 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{l} 1) \quad z^2 - (5+i)z + 8+i = 0 \\ 2) \quad z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0 \\ 3) \quad z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0 \\ \quad \text{(on cherchera une solution réelle en premier lieu).} \\ 4) \quad z^4 - z^2 + 1 = 0 \end{array}$$

23 ★★

- 1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5t)$ comme une fonction polynômiale de $\cos(t)$.
- 2) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation $16z^4 - 20z^2 + 5 = 0$, puis la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
- 3) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

24 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} a) \quad \begin{cases} u+v = 2 \\ uv = -4 \end{cases} & b) \quad \begin{cases} u+v = 3i \\ uv = -1-3i \end{cases} \\ c) \quad \begin{cases} u+v = 4 \\ 1/u + 1/v = 4 \end{cases} & d) \quad \begin{cases} u+v = 4 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \end{array}$$

25 ★★★★★

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} (a) \quad e^z = 1 - i\sqrt{3} \\ (b) \quad e^z = 1 + i \\ (c) \quad e^z + e^{-z} = 1 \end{array}$$

2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| \leq e^{|z|}$. Étudier le cas d'égalité.

26 ★★ On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 1) Mettre j sous forme exponentielle. En déduire que $j^2 = \bar{j}$ et que $\bar{j}^2 = j$.
- 2) Montrer que j et $\bar{j}$ sont les racines du polynôme $1+z+z^2$.
- 3) Factoriser le polynôme $z^3 - 1$.

27 ★★★ On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 [3]}}^n \binom{n}{k} \quad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1 [3]}}^n \binom{n}{k} \quad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2 [3]}}^n \binom{n}{k}$$

1) Calculer les complexes suivants :

$$u = A + B + C \quad v = A + jB + j^2C \quad w = A + j^2B + jC$$

2) En déduire la valeur de A .

———— **Argument, géométrie complexe** ————

28 ★★ Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

$$1) (1+i)^n \in \mathbb{R} \quad 2) (\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbb{R}$$

29 ★★ Représenter graphiquement les ensembles suivants :

- 1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| = 5\}$
- 2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
- 3) $\{z \in \mathbb{C}^* \mid 3 \arg(z) \equiv \pi [2\pi]\}$
- 4) $\{a + re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ sont fixés.

30 ★★ On considère les points A, B, C affixes respectives $a = 1, b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Déterminer la nature du triangle ABC .

31 ★★★ Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

- 1) Les points d'affixe $1, z$ et z^2 soient alignés.
- 2) Les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle dont M est l'angle droit.
- 3) Les vecteurs d'affixe z et $\bar{z}$ sont orthogonaux.
- 4) Les points $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ sont situés sur un même cercle de centre l'origine.